

Existen infinitos más grandes que otros.

La revolución matemática de Georg Cantor
y el precio de descifrar el abismo.

*"La esencia de las matemáticas es su libertad.
— Georg Cantor"*

El arquitecto de lo inmensurable



Georg Cantor
(1845)

Nace en 1845 en Rusia;
nacionalizado alemán.

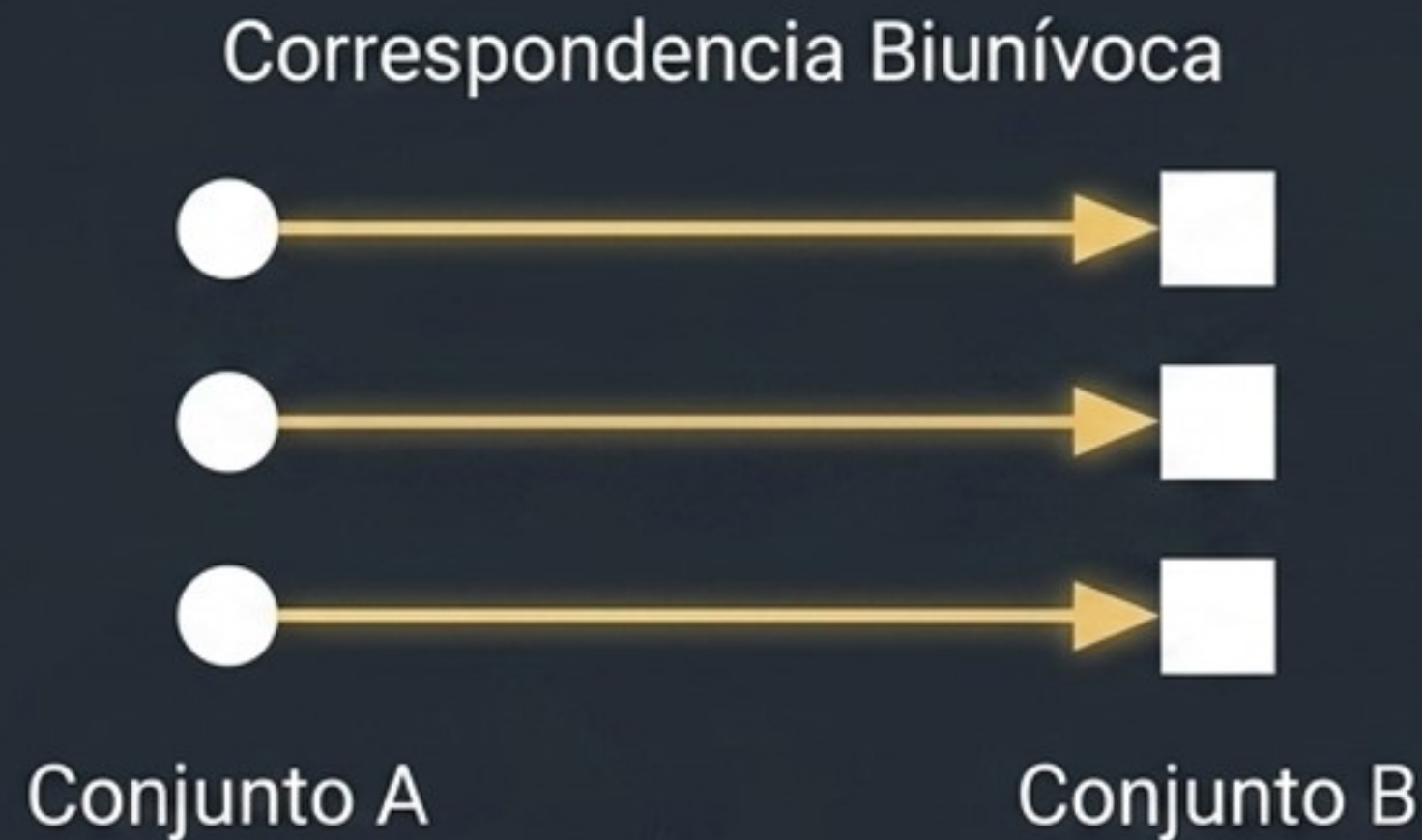
Niño prodigio del violín proveniente de una familia artística (hermano pianista, hermana dibujante).

Profundamente religioso, estudió matemática en paralelo con la teología y la filosofía.

Crea la Teoría de Conjuntos (1874-1895) antes de cumplir los 30 años, rompiendo siglos de tradición matemática.

¿Cómo se mide lo que no tiene fin?

Para comparar infinitos, Cantor introdujo una herramienta simple pero revolucionaria: el apareamiento. Si puedes conectar cada elemento de un conjunto A con un elemento de un conjunto B sin que sobre ninguno, tienen el mismo tamaño (el mismo número cardinal).



Un conjunto infinito es aquel que es coordinable (apareable) con el conjunto de los números naturales.

La primera paradoja: La parte es igual al todo.



Contra toda intuición, hay exactamente la misma cantidad de números naturales que de números pares. A este tamaño de infinito se le llamó Aleph-cero ($\aleph_0$).

Lo veo y no lo creo.
— Georg Cantor

La anatomía del infinito.

Aleph-Cero (Conjuntos Numerables)	El Continuo (Conjuntos No Numerables)
Propiedad: Se pueden listar y emparejar con los números naturales ($\mathbb{N}$).	Propiedad: Imposibles de coordinar con los naturales. Demasiado densos.
Habitantes: Números Naturales, Pares, Impares, Enteros, Racionales (fracciones), Algebraicos.	Habitantes: Números Reales, Irracionales, Trascendentes.
Conclusión: Todos tienen el mismo tamaño infinito.	Conclusión: Hay infinitamente más números irracionales que racionales. Es un infinito mayor .

El Método de la Diagonal: La prueba irrefutable.

¿Cómo demostrar que los decimales (Reales) superan a los Naturales?
Cantor demostró que cualquier lista de decimales siempre dejará uno afuera.

Paso 1: La Lista

N		$\mathbb{R} (0, 1)$
1	---	$0.a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 a_5^1 \dots$
2	---	$0.a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 \dots$
3	---	$0.a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^3 \dots$
4	---	$0.a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^4 \dots$
5	---	$0.a_1^5 a_2^5 a_3^5 a_4^5 a_5^5 \dots$
$\vdots$		$\vdots$

Paso 2: La Diagonal

N	$\mathbb{R} (0, 1)$
1	$0.a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 a_5^1 \dots$
2	$0.a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 \dots$
3	$0.a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^3 \dots$
4	$0.a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^4 \dots$
5	$0.a_1^5 a_2^5 a_3^5 a_4^5 a_5^5 \dots$
$\vdots$	$\vdots$

Paso 3: El Cambio

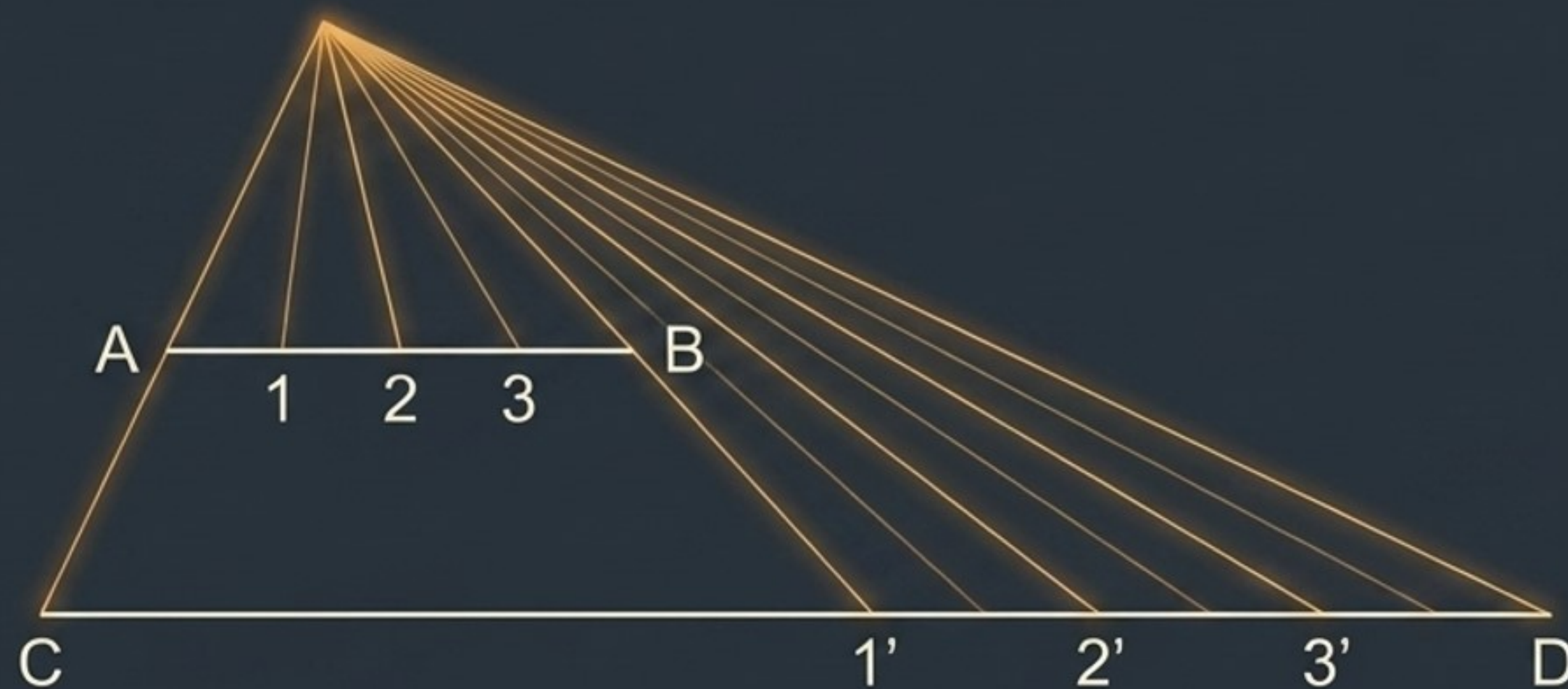
Suma +1 a cada
número de la diagonal

$\begin{array}{ccccc} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ \hline 0.a_1^1 & a_2^2 & a_3^3 & a_4^4 & a_5^5 \dots \end{array}$

$0.b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$

Este nuevo número no puede estar en ninguna fila de la lista infinita.
Por lo tanto, el conjunto de los Reales es un infinito de mayor magnitud y no numerable.

La geometría de la eternidad.



Todo segmento lineal, por pequeño que sea, contiene tantos puntos como una línea recta infinita. La longitud física no determina el cardinal (cantidad de puntos) de un conjunto infinito continuo.

La Hipótesis del Continuo y el colapso.

1

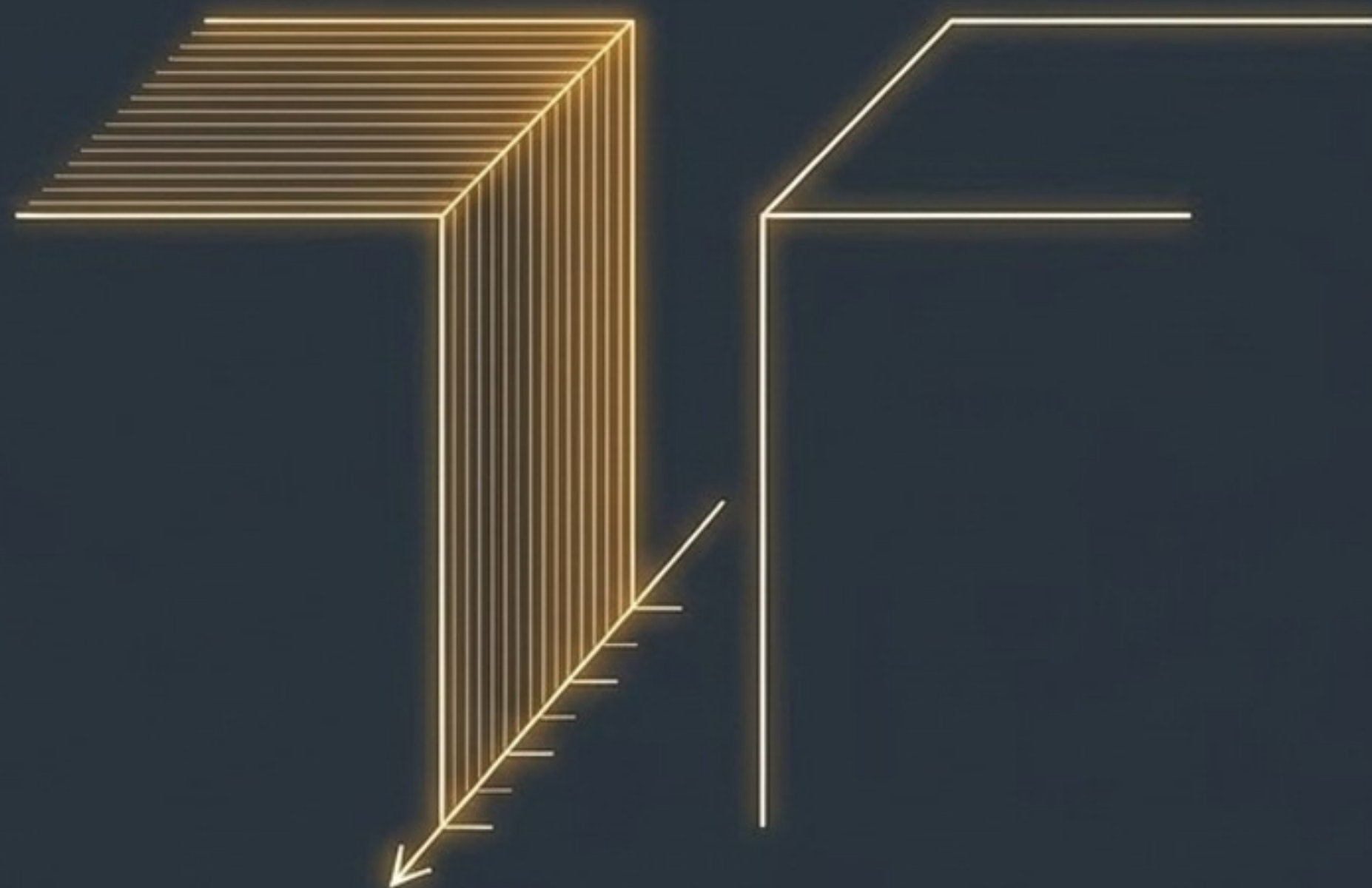
La Matemática:

Cantor formuló su pregunta final: ¿Existe algún **tamaño de infinito intermedio** entre **Aleph-cero** (los naturales) y el **Continuo** (los reales)? Él creía que no, pero nunca pudo demostrarlo.

2

La Tragedia:

La frustración por este **enigma irresoluble**, sumada a los brutales **ataques de Kronecker** (quien destruía su obra ante sus propios discípulos), quebraron la mente de Cantor.



La comunidad científica cerró filas en su contra. Cantor, el hombre que mapeó el infinito, pasó sus últimos años aquejado de severas depresiones y reiterados encierros en manicomios.

La victoria póstuma.

Finalmente, matemáticos titánicos como Mittag-Leffler, Hermite y, sobre todo, David Hilbert, salieron en defensa de la obra de Cantor, cimentando la Teoría de Conjuntos como el pilar de la matemática moderna.

¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre. — David Hilbert (1921).

Cantor fue destruido por su época, pero su mente construyó el andamiaje sobre el que descansa nuestra comprensión actual del universo lógico. Él tenía razón.

Guía Maestra de Operaciones con Infinitos y Límites

Referencia visual clara y didáctica sobre cómo operar con el concepto de infinito en el cálculo de límites, identificando reglas establecidas e indeterminaciones.

Reglas de Operación

Sumas con Infinito

$$\infty + k = \infty \text{ (para cualquier } k \text{ real)}$$

$$-\infty + k = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

Productos y Multiplicación

$$\text{Si } k > 0: k \cdot (+\infty) = +\infty \text{ y } k \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\text{Si } k < 0: k \cdot (+\infty) = -\infty \text{ y } k \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \text{ y } (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

Cocientes (Divisiones)

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

$$\frac{k}{0} = \infty \text{ (si } k \neq 0)$$

$$\infty / 0 = \infty$$

$$\infty / k: \text{ Resultado es } +\infty \text{ si } k > 0, \text{ y } -\infty \text{ si } k < 0$$

Potencias con Infinito

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

$$\text{Si la base es } \infty: \infty^k = \infty \text{ (si } k > 0) \text{ y } \infty^k = 0 \text{ (si } k < 0)$$

$$\text{Si el exponente es } \infty: a^\infty = \infty \text{ (si } a > 1) \text{ y } a^\infty = 0 \text{ (si } 0 < a < 1)$$

$$\text{Casos con exponente negativo: } k^{-\infty} = 0 \text{ (si } k > 1) \text{ y } k^{-\infty} = +\infty \text{ (si } 0 < k < 1)$$

Indeterminaciones

¿Qué es una Indeterminación?

Son expresiones matemáticas que no tienen un resultado inmediato y requieren un análisis más profundo del límite.

Las 7 Formas Indeterminadas

$$0/0 \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad 1^\infty \quad 0^0 \quad \infty^0$$

Sección de Ejercicios

¡Ponte a prueba!

Resuelve las siguientes operaciones basadas en las reglas anteriores:

Ejercicio: ∞^{-1}	Espacio para solución:	Ejercicio: π^∞	Espacio para solución:
Ejercicio: 65^∞	Espacio para solución:	Ejercicio: $\infty^{-\infty}$	Espacio para solución:
Ejercicio: $\pi^{-\infty}$	Espacio para solución:	Ejercicio: ∞^{-e}	Espacio para solución:
Ejercicio: $x^{\alpha-\infty}$	Espacio para solución:		